Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Φροντιστηριακές ασκήσεις #4, Μάρτιος 2016, Ελάχιστο πολυώνυμο - Εσωτερικό γινόμενο

1. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = (-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) \in \mathbb{F}[x]$ και τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

Ο A λέγεται **συνοδεύων** πίνακας του πολυωνύμου. Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι το $f(x)$.

2. Έστω $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιος ώστε $A^2 + I_2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$. Να υπολογίσετε το ελάχιστο πολυώνυμο του A και να δείξετε ότι ο A δεν είναι διαγωνίσιμος.

3. Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιος ώστε $A^2 = I_3$. Τί γνωρίζετε για το ελάχιστο πολυώνυμο του A και τί για το χαρακτηριστικό; Είναι ο A διαγώνιος; Είναι ο A διαγωνίσιμος;

4. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και m φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του n. Δείξτε ότι αν $A^m = \mathbb{O}_{n\times n}$ τότε $A^n = \mathbb{O}_{n\times n}$.

5. Βρείτε τον πίνακα e^A, όπου A είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

6. Έστω η απεικόνιση $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2.$$

- Δείξτε ότι η απεικόνιση αυτή ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$.
- Βρείτε τα μήκη των διανυσμάτων $(1,0), (0,1)$ ως προς αυτό το γινόμενο.

7. Ας είναι $\mathbb{R}_n[x]$ ο διανυσματικός χώρος όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ n και $r_0, r_1, \ldots, r_n$ πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle f, g \rangle = f(r_0)g(r_0) + f(r_1)g(r_1) + \cdots + f(r_n)g(r_n)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}_n[x]$.

2ο βαθμού → $\{ (x-\sqrt{2016})(x+\sqrt{2016}),\ x(x+\sqrt{2016}),\ x(x-\sqrt{2016})$
3ο βαθμού $\{ x(x-\sqrt{2016})(x+\sqrt{2016})$

Φροντιστηριακές ασκήσεις #4

Άσκηση 2

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad A^2+I=\emptyset_{2\times 2}$

Ο πίνακας A μηδενίζει το πολυώνυμο $g(x)=x^2+1$

Άρα $m_A(x) / x^2+1$

$m_A(x) \in \mathbb{R}[x]$ και $m_A(x) \in \{x, x^2+1\}$

Άρα $m_A(x)=x^2+1$ δεν είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων, άρα ο πίνακας δεν είναι διαγωνίσιμος

Αν $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ τότε $m_A(x) \in \{x+i, x-i, (x+i)(x-i)\}$

Είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων και οι ρίζες απλές, άρα πάνω από τους πραγματικούς, δηλαδή όπως μιγαδικούς, είναι διαγωνίσιμος.

$A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$m_A(x)=x+i$	$m_A(x)=x-i$	$m_A(x)=x^2+1$
$\chi_A(x)=(x+i)^2$	$\chi_A(x)=(x-i)^2$	$\chi_A(x)=x^2+1$
$A=\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	

Ερώτηση: $A \in \mathbb{R}^{5\times5}$

$m_A(x) = (x-2)(x+4)$

$\chi_A(x) = -(x-2)^{\alpha}(x+4)^{\beta}$

$\alpha+\beta=5 \qquad 1\le\alpha\le4$

$\qquad\qquad\quad 1\le\beta\le4$

$-(x-2)(x+4)^4$ Ο πίνακας είναι διαγωνίσιμος!

$-(x-2)(x+4)^3$ Το $m_A(x)$ γινόμενο πρωτοβάθμι-

$-(x-2)^3(x+4)^2$ και το 2 και το 4 απλές

$-(x-2)(x+4)$ ρίζες.

Άσκηση 3

$A \in \mathbb{R}^{3\times3} \quad A^2 = I_3 \qquad h(x) = x^2-1$

$m_A(x) \mid x^2-1 = (x-1)(x+1) \qquad m_A(x) \in \{\cancel{1}, x-1, x+1, (x-1)(x+1)\}$

i) $m_A(x) = x-1$ $\qquad$ ii) $m_A(x) = x+1$

$\chi_A(x) = -(x-1)^3$ $\qquad A = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$m_A(A) = 0 \Rightarrow A - I = 0$ $\qquad \chi_A(x) = -(x+1)^3$

$\Rightarrow A = I$

Διαγώνιος + Διαγωνίσιμος

iii) $m_A(x) = (x-1)(x+1)$

$\chi_A(x) = -(x-1)^2(x+1)$ ή $\chi_A(x) = -(x-1)(x+1)^2$

Διαγωνίσιμος

Άσκηση 4:

Ο πίνακας A μηδενίζει το πολυώνυμο

$f(x) = x^m$

Άρα το ελάχιστο διαιρεί το $x^m \Rightarrow m_A(x) = x^s$

$\deg(m_A(x)) = s \le \deg(\chi_A(x)) = n$

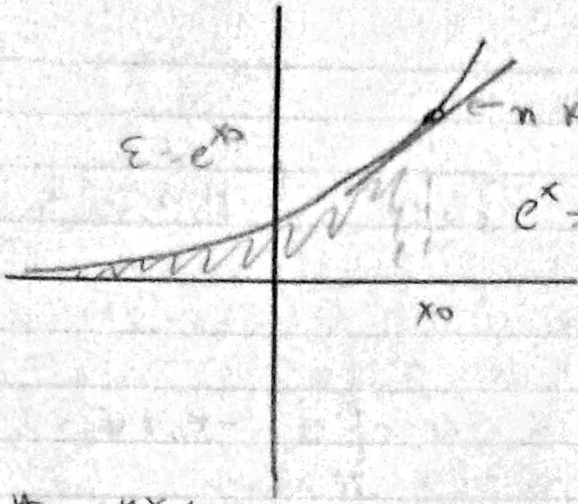
Άρα $\left.\begin{array}{l} A^s = 0_{n\times n} \\ s \le n \end{array}\right\} \Rightarrow A^s \cdot A^{n-s} = 0 \cdot A^{n-s}$

$A^n = 0_{n\times n}$

Άσκηση 5

$f(x)=e^{x}$

$f'(x)=f(x)$



← η κλίση της εφαπτομένης e^{x_0}

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

$A\in\mathbb{R}^{n\times n} \qquad e^{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$

Ορισμός: $$e^{A}=I_n+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}\cdot A^3+\dots+\frac{1}{n!}\cdot A^n+\dots$$

$$e^{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}}=I_n+\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}^2+\dots+\frac{1}{m!}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}^m+$$

$$=I_n+\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \lambda_n^2\end{pmatrix}+\dots+\frac{1}{m!}\begin{pmatrix}\lambda_1^m & & \\ & \lambda_2^m & \\ & & \lambda_n^m\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+\lambda_1+\frac{1}{2!}\lambda_1^2+\dots+\frac{1}{m!}\lambda_1^m+\dots & & \\ & \ddots & \\ & & 1+\lambda_n+\frac{1}{2!}\lambda_n^2+\dots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

Άσκηση 5

$$e^{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}} = I_2 + A + \frac{1}{2!}\cdot A^2 + \dots + \frac{1}{m!} A^m + \dots$$

A διαγωνίσιμος;

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix}1-x & 2\\ 3 & 4-x\end{vmatrix} = (1-x)(4-x) - 6 = x^2-4x+3-8 =$$
$$= x^2-4x-5 = (x-5)(x+1)$$

Ιδιοτιμές 5, -1

$$V(5) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \,\middle|\, (A-5I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}-4 & 2 & 0\\ 4 & -2 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{r_2+r_1} \left(\begin{array}{cc|c}-4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{r_1/-4} \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1/4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$x - \frac{1}{2}y = 0$ $\quad x = \frac{1}{2}t$
$y = t$ $\quad y = t$

$$V_A(-1) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \left(A+1I\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & 2 & 0\\ 4 & 4 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to r_1/2} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 4 & 4 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 4r_1} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y=0\\ y=s\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=-s\\ y=s\end{array}$$

Άρα $V(-1) = \left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\cdot P$$

$$[L_A]_\varepsilon^\varepsilon = [I]_a^\varepsilon\,[L_A]_a^a\,[I]_\varepsilon^a$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \kappa\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\kappa-\lambda\\2\kappa+\lambda\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\kappa - \lambda = 1\\ 2\kappa + \lambda = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\kappa = 1/3\\ \lambda = -2/3\end{cases}$$

$$e^{\begin{pmatrix}4 & 8\\ & 3\end{pmatrix}} = I_2 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{m!}A^m + \dots$$

$$= I_2 + P^{-1}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot P + \frac{1}{2!}\left(P^{-1}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P\right)^2 + \dots + \frac{1}{m!}\left(P^{-1}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P\right)^m + \dots$$

$$= P^{-1} I_2 \cdot P + P^{-1}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P + \frac{1}{2!}\left(P^{-1}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P\right)^2 + \dots + \frac{1}{m!}P^{-1}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^m P +$$

$$= P^{-1}\left(I_2 + \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^2 + \dots + \frac{1}{m!}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^m\right)P \Rightarrow$$

$$e^A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^5 & 0\\ 0 & e^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}e^5 & -e^{-1}\\ 2e^5 & e^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

$\chi_A(x) =$

$(-1)^7 x^7 - 5x^3 + 2x - 2017$

$(-1)^7(x^7 + 5x^3 - 2x + 2017)$

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2017\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

4) Ο πίνακας A μηδενίζει το πολυώνυμο $f(x) = x^4$

Άρα $m_A(x) | x^4 \Rightarrow m_A(x) = x^s$

$\deg(m_A(x)) | x^m \Rightarrow m_A(x) = x^s$

$\deg(m_A(x)) = s \leq \deg(\chi_A(x)) = 4$

Άρα $\left.\begin{array}{l}A^s = 0\\ s \leq 4\end{array}\right\} \Rightarrow A^s \cdot A^{4-s} = 0 \cdot A^{4-s} \Rightarrow A^s = O_{4\times 4}$

1. χ

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -x & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & -x & 0 & -\alpha_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1-x\,0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0\;1 & -\alpha_{n-1}-x \end{vmatrix} \xrightarrow{r_n \to r_n + x \cdot r_1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-x & 0 & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2}-\alpha_{n-1}x-x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha_{n-1}-x \end{vmatrix} \xrightarrow{r_{n-2} + x \cdot r_{n-2}}$$

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & -x & 0 & & & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & -x & & & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0\;0 & & -a_{n-3}-x \cdot a_{n-2}-a_{n-1}x^2-x^3 \\ 0 & 0 & & 1\;0 & & -a_{n-2}-\alpha_{n-1}x-x^2 \\ 0 & 0 & & 0\;1 & & -a_{n-2}-x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & -\alpha_1-\alpha_2 x - a_{n-1}x^{n-1} \\ & 1\,0\,0 & & \cdot x^{n-1} \\ & 10 & & \\ & & 1\,0 & \\ & & 1 & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} r_1 \xrightarrow{xr_2} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_0-\alpha_1 x-\alpha_2 x^2-\dots-a_{n-1}x^{n-1}-x^n \\ & 0 & 0 & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots\;1 & \end{vmatrix} =$$

$= 0 + 0 + \dots + 0 + (-1)^{n-1}(-\alpha_0-\alpha_1 x-\alpha_2 x^2-\alpha_n$

$= (-1)^{n+1}(-(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n)$

$= (-1)^{n+2}(\alpha_0+\alpha_1 x+\dots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+x^n)$

$= (-1)^n(\alpha_0+\alpha_1 x+\dots+x^n)$

Φυλλάδιο #4

-Άσκηση 6

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$<(a_1,a_2),(b_1,b_2)> = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2$

i) $< >$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$

ii) $\|(1,0)\|$, $\|(0,1)\|$

Λύση

i) Θα δ.ο. $<(a_1,a_2),(b_1,b_2)> = <(b_1,b_2),(a_1,a_2)>$

$<(a_1,a_2),(b_1,b_2)> = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2$

$= 5b_1a_1 - 2b_1a_2 - 2b_2a_1 + b_2a_2 = <(b_1,b_2),(a_1,a_2)>$

2) $<(a_1,a_2)+(a_1',a_2'),(b_1,b_2)> =$

$= <(a_1+a_1', a_2+a_2'),(b_1,b_2)>$

$= 5(a_1+a_1')b_1 - 2(a_1+a_1')b_2 - 2(a_2+a_2')b_1 + (a_2+a_2')b_2$

$= 5a_1b_1 - 2a_1b_1 + a_2b_2 + 5a_1'b_1 - 2a_1'b_1 - 2a_2'b_1 + a_2'b_2$

$= <(a_1,a_2),(b_1,b_2)> + <(a_1',a_2'),(b_1,b_2)>$

$<\lambda(a_1,a_2),(b_1,b_2)> = <(\lambda a_1, \lambda a_2),(b_1,b_2)> =$

$= 5\lambda a_1b_1 - 2\lambda a_1b_2 - 2\lambda a_2b + \lambda a_2b_2 = \lambda(5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2)$

$= \lambda <(a_1,a_2),(b_1,b_2)>$

$\langle (a_1,a_2), (b_1,b_2)+(b_1',b_2') \rangle$
$= \langle (b_1,b_2)+(b_1',b_2'), (a_1,a_2) \rangle$
$= \langle (b_1,b_2), (a_1,a_2) \rangle + \langle (b_1',b_2'), (a_1,a_2) \rangle$
$= \langle (a_1,a_2), (b_1,b_2) \rangle + \langle (a_1,a_2), (b_1',b_2') \rangle$

$\langle (a_1,a_2), \lambda(b_1,b_2) \rangle = \langle \lambda(b_1,b_2), (a_1,a_2) \rangle =$
$= \lambda \langle (b_1,b_2), (a_1,a_2) \rangle = \lambda \langle (a_1,a_2), (b_1,b_2) \rangle$

$\langle (a_1,a_2), (a_1,a_2) \rangle = 5a_1a_1 - 2a_1a_2 - 2a_2a_1 + a_1a_2 =$
$= 5a_1^2 - 4a_1a_2 + a_2^2 = a_1^2 + 4a_1^2 - 2(2a_1)a_2 + a_2^2 =$
$= a_1^2 + (2a_1 - a_2)^2 \geq 0$

Έστω ότι $\langle (a_1,a_2), (a_1,a_2) \rangle = 0 \Rightarrow a_1^2 + (2a_1-a_2)^2 = 0$
$\Rightarrow a_1 = 0 \quad 2a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 0 \Rightarrow (a_1,a_2) = (0,0)$

ii) $\|(1,0)\| = \sqrt{\langle (1,0),(1,0) \rangle} = \sqrt{5 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt{5}$
$\|(0,1)\| = \sqrt{\langle (0,1),(0,1) \rangle} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1$

$\langle (1,0),(0,1) \rangle = -2$

$\langle (a_1,a_2),(b_1,b_2) \rangle = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2 + R$
$= (a_1,a_2) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Άσκηση 7

$R_n[x]$ $r_0, r_1 \dots r_n$ διαφορετικά μεταξύ τους

$\langle \,,\, \rangle : R_n[x] \times R_n[x] \to R$

$\langle f, g \rangle = f(r_0)g(r_0) + f(r_1)g(r_1) + \dots + f(r_n)g(r_n)$

Λύση

(Συμμετρικό)

$$\langle f, g \rangle = f(r_0)g(r_0) + f(r_1)g(r_1) + \dots + f(r_n)g(r_n)$$
$$= g(r_0)f(r_0) + g(r_1)f(r_1) + \dots + g(r_n)f(r_n)$$
$$= \langle g, f \rangle$$

(Διγραμμικό)

$$\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(r_0)g(r_0) + \dots + (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(r_n)g(r_n)$$
$$= (\lambda_1 f_1(r_0) + \lambda_2 f_2(r_0))g(r_0) + \dots + (\lambda_1 f_1(r_n) + \lambda_2 f_2(r_n))g(r_n) =$$
$$= \lambda_1 f_1(r_0)g(r_0) + \lambda_2 f_2(r_0)g(r_0) + \dots + \lambda_1 f_1(r_n)g(r_n) + \lambda_2 f_2(r_n)g(r_n)$$
$$= \lambda_1 (f_1(r_0)g(r_0) + f_1(r_1)g(r_1) + \dots + f_1(r_n)g(r_n)) + \lambda_2 (f_2(r_0)g(r_0) + \dots + f_2(r_n)g(r_n))$$

$$= \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle$$

$$\langle f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \rangle = \langle \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, f \rangle = \lambda_1 \langle g_1, f \rangle + \lambda_2 \langle g_2, f \rangle$$
$$= \lambda_1 \langle f, g_1 \rangle + \lambda_2 \langle f, g_2 \rangle$$

(Θετικά Ορισμένο)

$$\langle f, f \rangle = f(r_0) f(r_0) + f(r_1) \cdot f(r_1) + \dots + f(r_n) \cdot f(r_n)$$
$$= f(r_0)^2 + \dots + f(r_n)^2 \geq 0$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f(r_0)^2 + f(r_1)^2 + \dots + f(r_n)^2 = 0$$

$$\Rightarrow f(r_0) = 0, \; f(r_1) = 0, \; \dots, \; f(r_n) = 0$$

r_0 ρίζα του f, ... r_n ρίζα του r_n

Άρα το f έχει τουλάχιστον n+1 ρίζες

Το f είναι βαθμού το πολύ n και άρα αν είναι μη μηδενικό έχει το πολύ n-ρίζες $\Rightarrow$

f είναι το μηδενικό πολυώνυμο
$\langle \, , \, \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο σε $\mathbb{R}_n[x]$.

Χώρ

2 - Φυλλάδιο #3

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & a \\ 3 & 0 & b-x \end{pmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 2-x & a \\ 0 & b-x \end{vmatrix} = (2-x)^2(b-x)$$

Ιδιοτιμές: $2, b$

i) $b=2$ τότε το 2 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 3

ii) $b\neq 2$ τότε 2 αλγ. πολ 2 και b αλγ. πολ 1

Περίπτωση (i): A διαγωνίσιμος $\dim V(2)=3$

(ii): A διαγωνίσιμος $\dim V(2)=2$ και $\dim V(b)=1$

$1\leq \dim V(b)\leq 1$